Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (203, 205, 206, 220, 221)

Berthelin p. 30-32 et Rouvière exo 60

Thm : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications continues.
Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.
Alors le problème de Cauchy (P) : $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution définie sur I.

démo :

* <u>Étape 1</u> : Cas où $I = [a,b]$ contenant t_0.

On note $M = \sup_{t \in I} \|A(t)\| < M$ et on considère $\varphi : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$

$$x \longmapsto \varphi(x) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s) + b(s)\,ds \end{cases}$$

Résoudre le problème de Cauchy (P) revient à chercher une solution continue de l'équation intégrale : $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s) + b(s)\,ds$.

Ainsi : $x \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ est solution de (P) ssi $\varphi(x) = x$ ssi x est un point fixe de φ.

Soit $x, y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$

Montrons par récurrence $\forall k \geq 1$, $\forall t \in I$, $\|\varphi^k(x)(t) - \varphi^k(y)(t)\| \leq \dfrac{M^k |t-t_0|^k}{k!} \|x-y\|_\infty$.

<u>Initialisation</u> : Pour $k=1$, on a $\forall t \in I$:

$$\|\varphi(x)(t) - \varphi(y)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)x(s) - A(s)y(s)\,ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)(x(s) - y(s))\|\,ds$$

$$\leq M \sup_{s \in [a,b]} \|x(s) - y(s)\| \, |t - t_0| \leq M \|x-y\|_\infty |t-t_0|$$

Étant vrai $\forall t \in I$, la propriété est initialisée.

<u>Hérédité</u> : On suppose l'hypothèse vraie pour un certain $k \geq 1$. Soit $t \in I$.

$$\|\varphi^{k+1}(x)(t) - \varphi^{k+1}(y)(t)\| = \|\varphi(\varphi^k(x))(t) - \varphi(\varphi^k(y))(t)\|$$

$$\|\varphi^{k+1}(x)(t)-\varphi^{k+1}(y)(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)(\varphi^k(x)(s)-\varphi^k(y)(s))\|\,ds$$
$$\leq M \int_{t_0}^{t} \|\varphi^k(x)(s)-\varphi^k(y)(s)\|\,ds$$
$$\leq M \int_{t_0}^{t} \frac{M^k |s-t_0|^k}{k!} \|x(s)-y(s)\|\,ds$$
$$\leq \frac{M^{k+1}}{k!}\|x-y\|_\infty \int_{t_0}^{t} |s-t_0|^k\,ds$$
$$\leq \frac{M^{k+1}}{k!}\|x-y\|_\infty \frac{|t-t_0|^{k+1}}{k+1} = \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}\|x-y\|_\infty .$$

Ceci étant vrai $\forall t\in I$, cela conclut la récurrence.

Comme $\forall t\in I$, $\forall k\geq 1$ $\|\varphi^k(x)(t)-\varphi^k(y)(t)\| \leq \frac{M^k |t-t_0|^k}{k!}\|x-y\|_\infty$

on en déduit par passage à la borne supérieur

$$\|\varphi^k(x)-\varphi^k(y)\|_\infty \leq \frac{M^k (b-a)^k}{k!}\|x-y\|_\infty \quad \forall x,y\in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$$

Comme $\boxed{\frac{M^k(b-a)^k}{k!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$, $\exists k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que φ^{k_0} soit contractante

D'après le thm du point fixe généralisé, φ admet un unique point fixe sur I, qui constitue donc l'unique solution du problème de Cauchy (P) sur I.

* Étape 2 : I quelconque de $\mathbb{R}$

On se donne $(K_m)_{m\geq 1}$ une suite de compact contenant t_0 vérifiant $K_m\subset I$ et $K_m\subset K_{m+1}$ ainsi que $\bigcup_{m\geq 1} K_m = I$.

Pour $m\geq 1$, l'étape 1 montre qu'il existe une unique solution $x_m\in\mathscr{C}^0(K_m,\mathbb{R}^n)$ au problème de Cauchy (P).

Unicité : Soit $x\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$ et $y\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$ deux solutions de (P).

Alors $\forall t\in I$, $m\geq 1$ tel que $t\in K_m$, on a :

$x|_{K_m} = x_m$ et $y|_{K_m} = x_m$ donc $x(t)=y(t)=x_m(t)$

Ceci étant vrai $\forall t\in I$, $x=y$

Existence : $\forall t\in I$, on définit $x(t)=x_l(t)$ où $l:=\min\{m\geq 1,\ t\in K_m\}$

La fonction x est bien définie d'après l'unicité des solutions sur chaque K_m

Elle constitue donc une solution à (P) sur I tout entier.

Questions : Théorème de Cauchy - Lipschitz linéaire

- $x \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ solution de (P) ssi $\varphi(x) = x$?

$\Rightarrow$ $x \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et solution de (P) alors on intègre et on obtient
↳ car x continue

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s) + b(s)\,ds. \quad \left(\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = x(t) - x(t_0) \right)$$

$\Leftarrow$ $x \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m)$ et $\varphi(x) = x$ alors x est dérivable sur I et donc en dérivant on obtient que x est solution de :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \left(x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s) + b(s)\,ds \right)$$

- $\dfrac{\Pi^k (b-a)^k}{k!} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$?

C'est le terme général d'une série convergente ($e^{\Pi(b-a)}$)

- thm du point fixe généralisé ?

Soit (E, d) métrique complet, $\Phi : E \to E$ telle que il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que Φ^p soit contractante.
Alors il existe un unique point fixe pour Φ.

* Application dans notre cas :

$E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ complet car I compact

$\Phi : E \to E = \varphi : \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^m)$

* Pourquoi unicité et existence ?

Unicité : Soit x et y points fixes de Φ.
Par récurrence immédiate, on a $\Phi^p(x) = \Phi(x) = x$ et $\Phi^p(y) = \Phi(y) = y$
Donc unicité par point fixe de Banach-Picard pour Φ^p. D'où $x = y$.

Existence : Par thm de Banach-Picard existence pour Φ^p.

$$\Phi(x) = \Phi(\Phi^p(x)) = \Phi^p(\Phi(x))$$

Ainsi $\Phi(x)$ est un point fixe de Φ^p
Par unicité de celui-ci, on a $\Phi(x) = x$.

- Suite de compact ?

Si $I =]\alpha, +\infty[$ Soit a, b tels que $t_0 \in [a,b]$. On définit K_m par : $K_1 = [a,b]$
$K_m = [\alpha + \frac{1}{m}(a-\alpha), b+m-1]$